Pertemuan ke 7

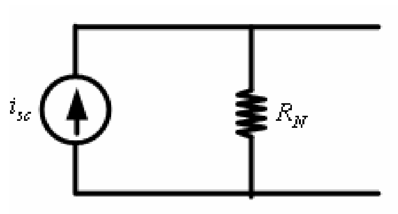
Teorema Rangkaian

1. Teorema Norton

Pada teorema ini berlaku bahwa:

Suatu rangkaian listrik dapat disederhanakan dengan hanya terdiri dari satu buah sumber arus yang dihubungparalelkan dengan sebuah impedensi ekivalennya pada dua terminal yang diamati.

Tujuan untuk menyederhanaka analisis rangkaian, yaitu dengan membuat rangkaian pengganti yang berupa sumber arus yang diparalel dengan impedansi ekivalennya.



$$i = \frac{V}{R_N} + i_{sc}$$

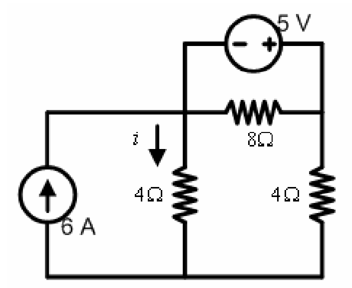
Langkah-langkah penyelesaian dengan teorema Norton:

1. Cari dan tentukan titik terminal a-b dimana parameter yang ditanyakan.
2. Lepaskan komponen pada titik a-b tersebut, *short circuit* kan pada terminal a-b kemudian hitung nilai arus dititik a-b tersebut ($I_{ab} = I_{sc} = I_N$).
3. Jika semua sumbernya adalah sumber bebas, maka tentukan nilai impedansi diukur pada titik a-b tersebut saat semua sumber di non aktifkan dengan cara diganti dengan tahanan dalamnya (untuk sumber tegangan bebas diganti rangkaian *short circuit* dan untuk sumber arus bebas dengan rangkaian *open circuit* ($R_{ab}=R_N=R_{th}$).
4. Jika terdapat sumber tak bebas, maka untuk mencari nilai tahanan pengganti nortonnya didapatkan dengan cara $R_N = \frac{V_{oc}}{I_N}$.
5. Untuk mencari V_{oc} pada terminal titik a-b tersebut dibuka dan dicari tegangan pada titik tersebut ($V_{ab} = V_{oc}$).
6. Gambarkan kembali rangkaian pengganti Nortonnya, kemudian pasangkan kembali komponen yang tadi dilepas dan hitung parameter yang ditanyakan.

Contoh latihan:

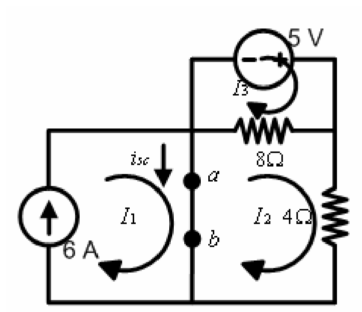
Untuk sumber bebas/independent

1. Tentukan nilai arus I dengan teorema Norton!



Jawaban:

Tenttukan titik a-b pada R dimana parameter I yang ditanyakan hitung $i_{sc} = i_N$ saat R = 4Ω dilepas:



Analisis mesh:

- Tinjau loop I_1:

  I_1 = 6A…………………………..(1)
- Tinjau loop I_3:

  $$\sum V = 0$$

  $$-5 + 8(I_3 - I_2) = 0$$

  $$8(I_3 - I_2) = 5$$

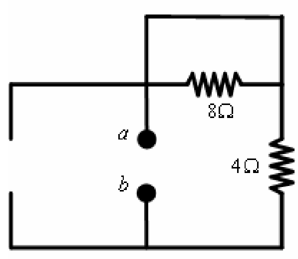
  Subtitusikan persamaan (2):

  $$8\left(\frac{3I_2}{2} - I_2\right) = 5$$

  $$4I_2 = 5 \rightarrow I_2 = \frac{5}{4}A$$

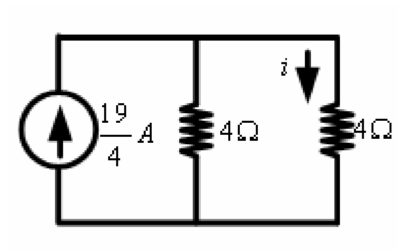
Sehingga: $I_{sc} = I_N = I_1 - I_2 = 6 - \frac{5}{4} = \frac{19}{4}A$

Mencari R_{th} ketika semua sumber bebasnya tidak aktif (diganti dengan tahanan dalamnya) dilihat dari titik a-b:



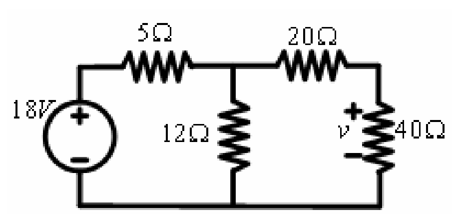
$R_N = 4\Omega$

Rangkaian pengganti Norton:



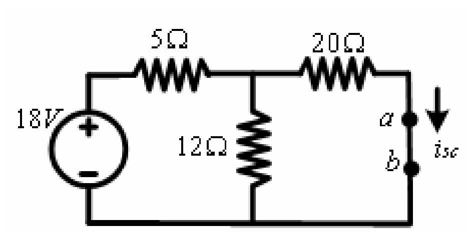
$$i = \frac{4}{4+4} i_N = \frac{4}{8} . \frac{19}{4} = \frac{19}{8} A$$

2. Tentukan nilai v dengan teorema Norton!



Jawaban:

Mencari i_{sc}:

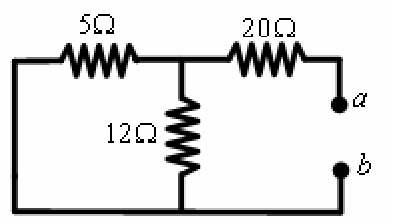


$$20\Omega // 12\Omega \rightarrow R_p = \frac{20.12}{20+12} = \frac{15}{2}\Omega$$

$$v_1 = \frac{R_p}{R_p + 5} x 18 = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{15}{2} + 5} 18 = \frac{54}{5} V$$

$$i_{sc} = i_N = \frac{v_1}{20} = \frac{27}{50} A$$

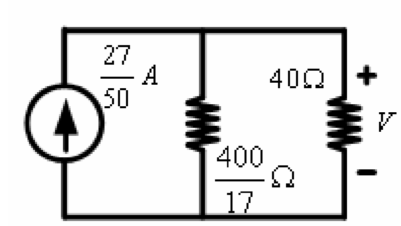
Mencari R_N dititik a-b:



$5\Omega//12\Omega \rightarrow R_p = \frac{5.12}{5+12} = \frac{60}{17}\Omega$

$R_N = R_p + 20\Omega = \frac{60}{17} + 20 = \frac{400}{17}\Omega$

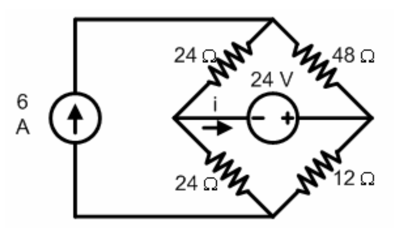
Rangkaian pengganti Norton:



$R_N//40\Omega \rightarrow R_p = \frac{\frac{400}{17}x40}{\frac{400}{17}+40} = \frac{400}{27}\Omega$

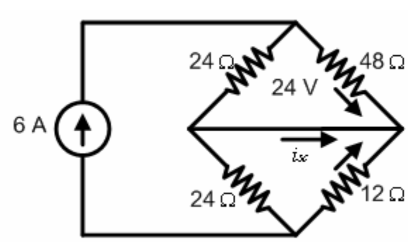
Sehingga: $v = i_N x R_p = \frac{27}{50} x \frac{400}{27} = 8V$

3. Tentukan nilai i dengan teorema Norton!



Jawaban:

Mencari i_{sc}:

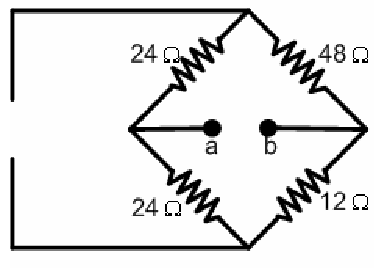


$I_{48\Omega} = \frac{24}{48+24} x6 = 2A$

$I_{12\Omega} = \frac{24}{24+12} x6 = 4A$

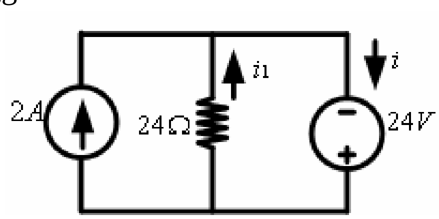
Sehingga: $i_{sc} = i_N = I_{12\Omega} - I_{48\Omega} = 4 - 2 = 2A$

mencariR_N:



$R_{s1} = 24\Omega + 48\Omega = 72\Omega$
$R_{s2} = 24\Omega + 12\Omega = 36\Omega$
$R_N = \dfrac{R_{s1}.R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} = \dfrac{72.36}{72 + 36} = 24\Omega$

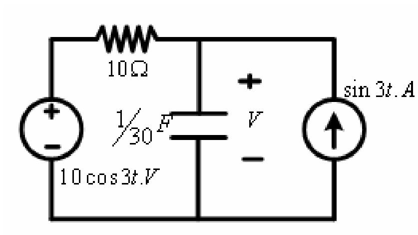
Rangkaian pengganti Norton:



$i_1 = \dfrac{24}{24} = 1A$

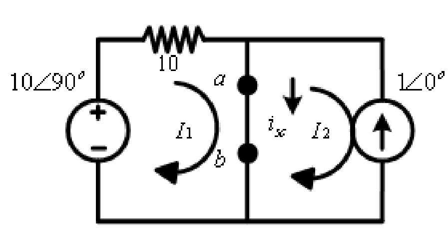
Sehingga: $i = i_N + i_1 = 2 + 1 = 3A$

4. Tentukan nilai V dengan teorema Norton!



Jawaban:

Mencari $i_{sc} = i_N$:



Tinjau loop I_1:

$\sum v = 0$
$-10\angle 90^0 + 10I_1 = 0$
$10I_1 = 10\angle 90^0 \rightarrow I_1 = 1\angle 90^0$

Tinjau loop I_2:

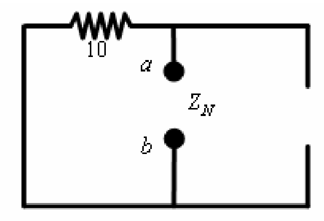
$I_2 = -1\angle 0^0$

Sehingga:

$i_{sc} = I_1 - I_2 = 1\angle 90^0 + 1\angle 0^0 = 1 + j$

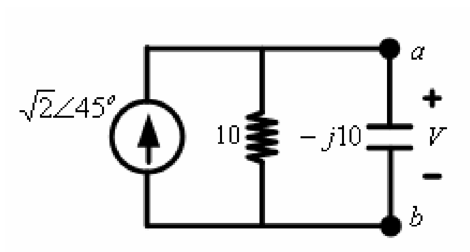
$i_{sc} = \sqrt{2}\angle 45^0$

Mencari Z_N:



Z_N =10Ω

Rangkaian pengganti Norton:



$$Z_p = \frac{-j10.10}{-j10 + 10} = \frac{100\angle -90^0}{10\sqrt{2}\angle -45^0} = 5\sqrt{2}\angle -45^0$$

Sehingga:

$V = Z_p x\sqrt{2}\angle 45^0 = 5\sqrt{2}\angle -45^0\sqrt{2}\angle 45^0$

$V = 10\angle 0^0$

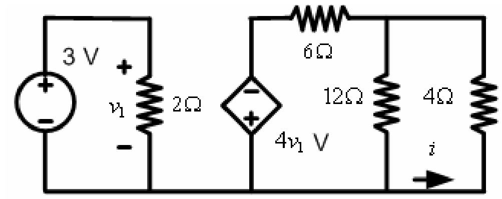
Maka:

$V = 10 sin 3tV$

Contoh latihan:

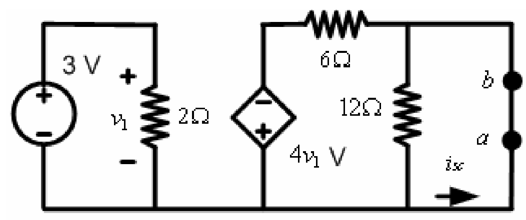
Untuk sumber tak bebas/dependent

1. Tentukan nilai i dengan teorema Norton!



Jawaban:

Mencari i_{sc}:



$v_1 = 3v$

$\sum v = 0$

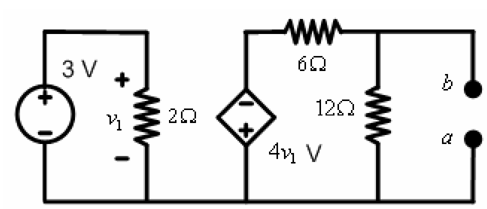
$-4v_1 + 6i_{sc} = 0$

$-4.3 + 6i_{sc} = 0$

$i_{sc} = \frac{12}{6} = 2A$

Sehingga: $i_{sc} = 2A$

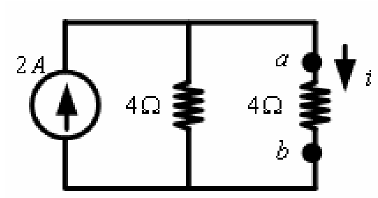
Mencari R_N harus mencari V_{oc}:



$V_1 = 3V$

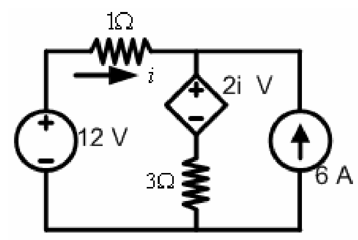
$V_{ab} = V_{oc} = \frac{12}{12+6} x4v_1 = \frac{12}{8} = 4\Omega$

Rangkaian pengganti Norton:

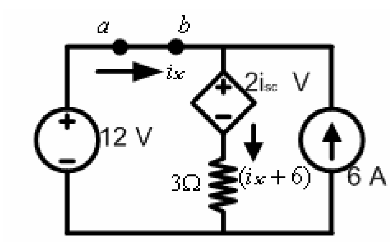


$$i = \frac{4}{4+4} x2A = 1A$$

2. Tentukan nilai i dengan teorema Norton!

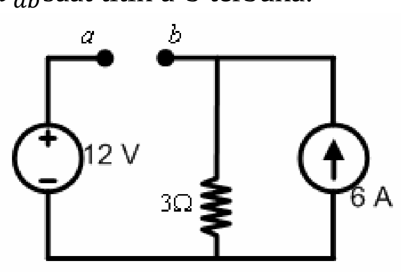


Jawaban:
Mencari i_{sc}:



$$\sum v = 0$$
$$2i_{sc} + 3(i_{sc} + 6) - 12 = 0$$
$$5i_{sc} + 6 = 0 \rightarrow i_{sc} = \frac{-6}{5} A$$

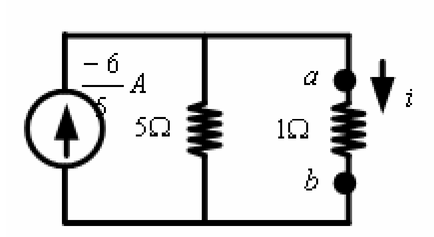
Cari R_N dengan mencari v_{ab}saat titik a-b terbuka:



$$V_{ab} = V_{oc} = +12 - 3.6 = 12 - 18 = -6V$$

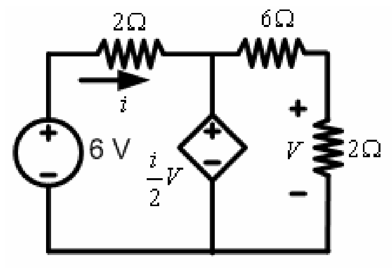
Sehingga: $R_N = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = \frac{-6}{-6/5} = 5\Omega$

Rangkaian pengganti Norton:



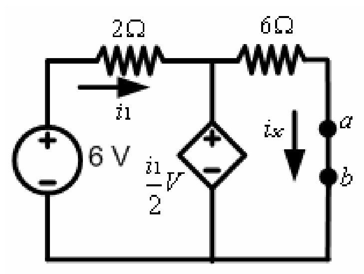
$$i = \frac{5}{5+1} x \frac{-6}{5} = -1A$$

3. Tentukan tegangan V dengan teorema Norton!



Jawaban:

Mencari i_{sc}:



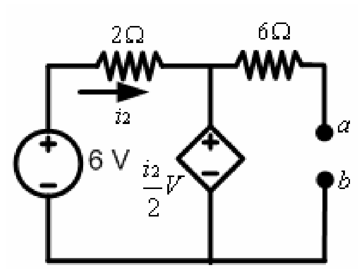
$$\sum v = 0$$

$$-6 + 2i_1 + \frac{i_1}{2} = 0$$

$$\frac{5i_1}{2} = 6 \rightarrow i_1 = \frac{12}{5}A$$

Sehingga: $i_{sc} = \frac{i_1/2}{6} = \frac{12/10}{6} = \frac{1}{5}A$

Mencari V_{ab}:



$V_{ab} = V_{oc}\dfrac{i_2}{2}$

$\sum v = 0$

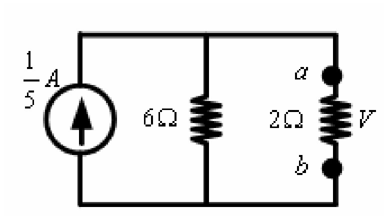
$-6 + 2i_2 + \dfrac{i_2}{2} = 0$

$\dfrac{5i_2}{2} = 6 \rightarrow i_2 = \dfrac{12}{5}A$

Sehingga: $V_{oc} = \frac{i_2}{2} = \frac{6}{5}V$

Maka: $R_N = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = \frac{6/5}{1/5} = 6\Omega$

Rangkaian pengganti Norton:



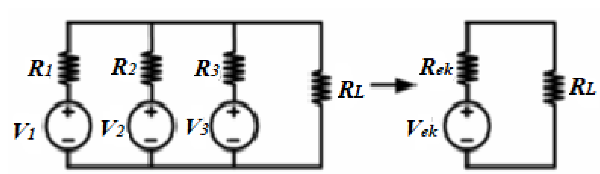
$2\Omega//6\Omega \rightarrow R_p = \dfrac{2.6}{2+6} = \dfrac{3}{2}\Omega$

Sehingga: $V = R_p x \frac{1}{5}A = \frac{3}{2}x\frac{1}{5} = \frac{3}{10}V$

2. Teorema Millman

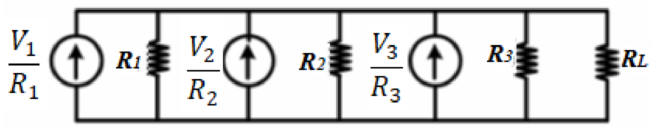
Teorema ini seringkali disebut juga sebagai teorema transformasi sumber, baik dari sumber tegangan yang dihubungserikan dengan resistansi ke sumber arus yang dihubungparalelkan dengan resistansi yang sama atau sebaliknya.

Teorema ini berguna untuk menyederhanakan rangkaian dengan multi sumber tegangan atau multi sumber arus menjadi satu sumber pengganti.

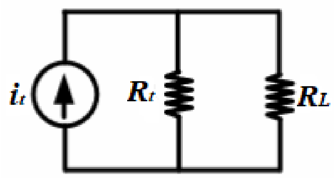


Langkah-langkah:

- Ubah semua sumber tegangan ke sumber arus

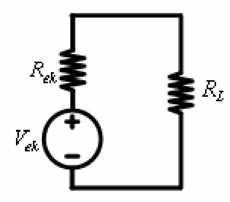


- Jumlah semua sumber arus parallel dan tahanan parallel



$$i_t = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$$
$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

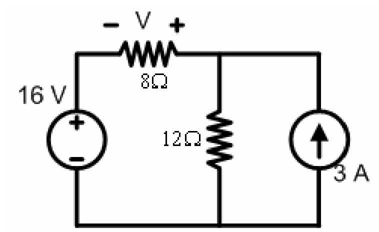
- Konversikan hasil akhir sumber arus ke sumber tegangan



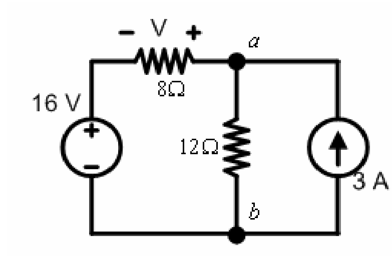
$$V_{ek} = i_t R_t$$
$$R_{ek} = R_t$$

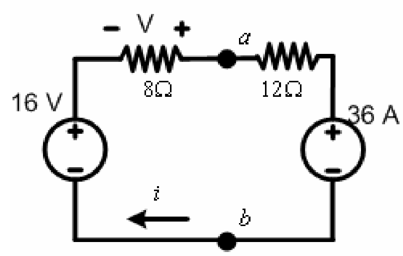
Contoh latihan:

1. Tentukan nilai V dengan transformasi sumber!



Jawaban:
Tinjau transformasi sumber dititik a-b:





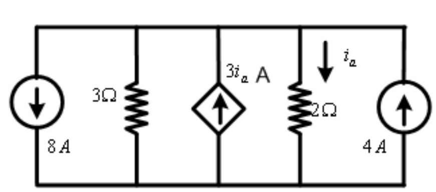
$$\sum v = 0$$

$$-16 + 8i + 12i + 36 = 0$$

$$20i + 20 \rightarrow i = \frac{-20}{20} = -1A$$

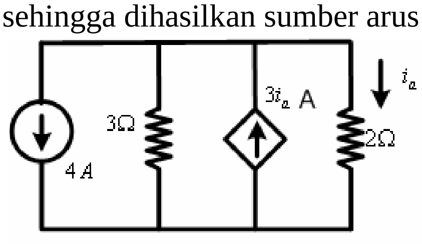
Sehingga: $V = -ix8\Omega = -(-1)x8 = 8V$

2. Tentukan i_a dengan transformasi sumber!

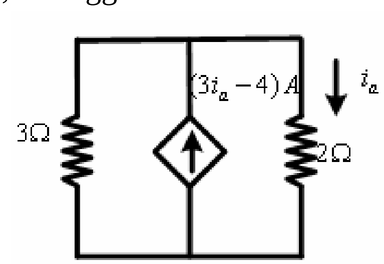


Jawban:

Tinjau sumber arus 8A dan 4A, sehingga dihasilkan sumber arus (8-4) =4A:



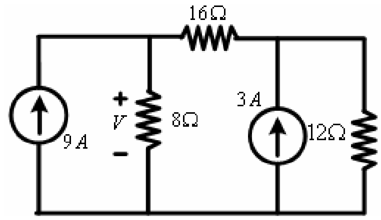
Tinjau sumber arus 4A dan $3i_a$A, sehingga dihasilkan sumber arus $(3i_a - 4)A$:



$$i_a = \frac{3}{3+2}x(3i_a - 4) = \frac{3}{5}x(3i_a - 4)$$

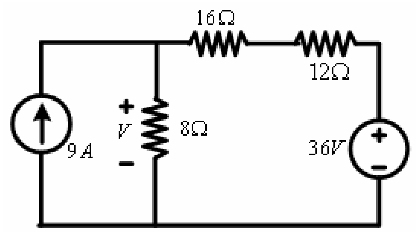
$$5i_a = 9i_a - 12$$
$$5i_a - 9i_a = -12$$
$$-4i_a = 12 \rightarrow i_a = \frac{-12}{-4} = 3A$$

3. Tentukan tegangan V dengan transformasi sumber!

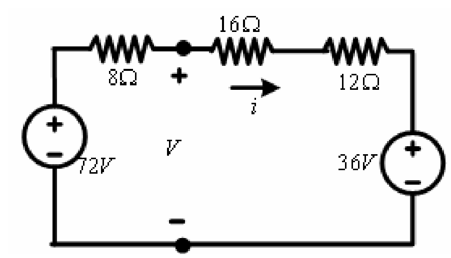


Jawaban:

Tinjau sumber arus 3A:



Tinjau sumber arus 9A:



$$\sum V = 0$$
$$-72 + 8i + 16i + 12i + 36 = 0$$
$$-36 + 36i = 0 \rightarrow i = \frac{36}{36} = 1A$$

Sehingga:

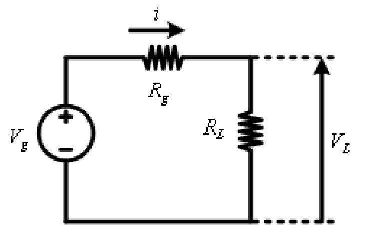
$$V = +72 - 8i = 72 - 8.1 = 64V$$

3. Teorema Transfer Daya Maksimum

Teorema ini menyatakan bahwa:

Transfer daya maksimum terjadi jika nilai resistansi beban sama dengan nilai resistansi sumber, baik dipasang seri dengan sumber tegangan ataupun dipasang parallel dengan sumber arus.

Hal ini dapat dibuktikan dengan penurunan rumus sebagai berikut:



$P_L = V_L i = i.R_L i = i^2 R_L$

Dimana:

$$i = \frac{V_g}{R_g + R_L}$$

Sehingga:

$$P_L = \left(\frac{V_g}{R_g + R_L}\right)^2 R_L$$

Dengan asumsi V_g dan R_g tetap, dan P_L merupakan R_L, maka untuk mencari nilai maksimum P_L adalah:

$$P_L = \left(\frac{V_g}{R_g + R_L}\right)^2 R_L = \frac{V_g^2}{\left(R_g + R_L\right)^2} R_L = V_g^2 \left(R_g + R_L\right)^{-2} R_L$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_g^2 \left[\left(R_g + R_L\right)^2 - 2\left(R_g + R_L\right)^{-3} R_L\right]$$

$$0 = V_g^2 \left[\frac{1}{\left(R_g + R_L\right)^2} - \frac{2R_L}{\left(R_g + R_L\right)^3}\right]$$

$$0 = V_g^2 \left[\frac{R_g - R_L}{\left(R_g + R_L\right)^3}\right]$$

Sehingga:

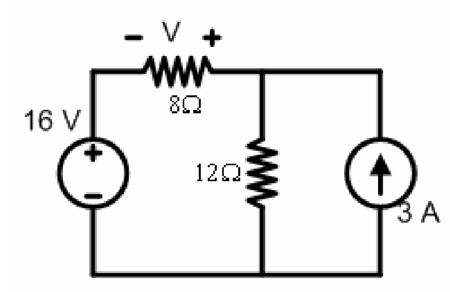
$R_L = R_L$

Teorema transfer daya maksimum adalah daya maksimum yang dikirimkan ketika beban R_L sama dengan beban intern sumber R_g.

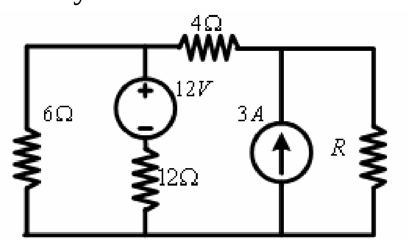
Maka didapatkan daya maksimumnya: $P_{I_{max}} = \frac{V_g^2}{4R_g}$

Soal untuk dikerjakan:

1. Tentukan nilai V dengan teorema Norton!



2. Tentukan R agar terjadi transfer daya maksimum!



3. Tentukan nilai R pada rangkaian berikut agar terjadi transfer daya maksimum: