

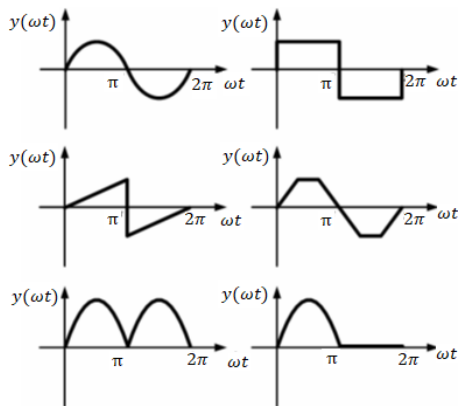
Dasar-dasar Rangkaian AC

1. Bentuk Gelombang

Pada bab sebelumnya telah dibahas sumber searah, dimana untuk selang waktu dari nol sampai tak hinggailainya akan selalu tetap atau konstan, sedangkan pada bab ini dibahas rangkaian listrik dengan sumbernya adalah bolak-balik, dimana untuk waktu tertentu akan didapatkan nilai yang berbeda-beda. Dengan sumber bolak-balik atau lebih singkatnya dengan sumber AC (*Alternating Current*) akan mempengaruhi komponen pasif yang digunakan, saat sumber DC maka komponen pasif seperti L dan C akan menjadi rangkaian hubungsingkat dan terbuka. Tetapi dengan sumber AC komponen pada L dan C akan berbeda halnya saat diberikan sumber DC.

Sebelum membahas masalah AC secara mendalam alangkah baiknya kita memperhatikan terlebih dahulu karakteristik dari sumber AC atau gelombang AC. Salah satu sifat khusus dari gelombang AC adalah dia mempunyai sifat periodic atau berulang dengan selang waktu tertentu atau lebih sering disebut dengan perioda, dimana nilai dari periodic ini memenuhi persamaan:

$f(t) = f(t + nT)$ dimana n : integer 0,1,2,... Dengan T = perioda, seperti pada gambar dibawah ini:



2. Konsep Phasor

Phasor adalah bilangan kompleks yang mempresentasikan besaran atau magnitude dan phasa gelombang sinusoidal.

Phasor biasanya ditanyakan dengan sebuah notasi pada domain frekuensi yang hanya terdiri dari besaran dan phasa;

Formula Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t = \text{Re}|e^{j\omega t}| + j\text{Im}|e^{j\omega t}|$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t = \operatorname{Re}|e^{-j\omega t}| - j\operatorname{Im}|e^{-j\omega t}|$$

Sebagai contoh:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \text{ volt dalam domain waktu}$$

$$\text{Formula Euler: } v = \operatorname{Re}|V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}| = V_m e^{j\theta} \text{ volt}$$

$$\text{Notasi phasor: } V(\omega) = V_m \angle \theta \text{ volt dalam domain frekuensi}$$

3. Bilangan Kompleks

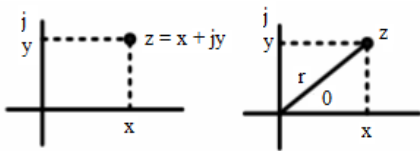
Bilangan yang terdiri dari harga real (nyata) dan harga imajiner (khayal)

Contoh:

$$z = x + jy$$

$$\text{Dimana } j = \sqrt{-1} \text{ atau } j^2 = -1$$

Grafik bilangan kompleks:



Bentuk-bentuk bilangan kompleks:

1. Bentuk kartesian/rectangular

$$z = x + jy$$

2. Bentuk polar

$$z = r \angle \theta$$

$$\text{Dimana: } x = r \cos \theta \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \theta \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

3. Bentuk eksponensial

$$z = r e^{j\theta}$$

$$\text{Dimana } x + jy = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta}$$

4. Bentuk trigonometri

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

konjugate bilangan kompleks

$$Z \rightarrow Z^*$$

$$z = x + jy \rightarrow z^* = x - jy$$

$$z = r\angle\theta \rightarrow z^* = r\angle -\theta$$

$$z = re^{j\theta} \rightarrow z^* = re^{-j\theta}$$

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) \rightarrow z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$$

Jumlah dan selisih bilangan kompleks

$$z_1 = x_1 + jy_1$$

$$z_2 = x_2 + jy_2$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + jy_1 - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Perkalian dan pembagian bilangan kompleks

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + jy_1 - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Perkalian dan pembagian bilangan kompleks

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

4. Arus dan Tegangan Sinusoidal

Arus sinusoidal:

Tegangan yang melewati elemen pasif jika arusnya sinusoidal

elemen	i	$i = I_m \sin\omega t$	$i = I_m \cos\omega t$
R	$V_R = R \cdot i$	$V_R = R \cdot I_m \sin\omega t$	$V_R = R \cdot I_m \cos\omega t$
L	$V_L = L \frac{di}{dt}$	$V_L = \omega L I_m \cos\omega t$	$V_L = \omega L I_m (-\sin\omega t)$
C	$V_C = \frac{1}{C} \int i dt$	$V_C = \frac{I_m}{\omega C} \cos\omega t$	$V_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\omega t$

Tegangan sinusoidal:

Arus pada elemen pasif jika tegangannya sinusoidal

elemen	V	$V = V_m \sin\omega t$	$V = V_m \cos\omega t$
--------	---	------------------------	------------------------

R	$i_R = \frac{V}{R}$	$i_R = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$	$i_R = \frac{V_m}{R} \cos \omega t$
L	$i_L = \frac{1}{L} \int v dt$	$i_L = \frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t$	$i_L = \frac{V_m}{\omega L} \sin \omega t$
C	$i_C = C \frac{dV}{dt}$	$i_C = \omega C V_m \cos \omega t$	$i_C = \omega C V_m (-\sin \omega t)$

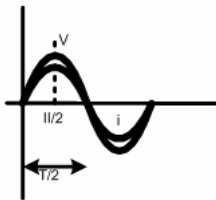
Sudut phasa

Pengaruh gelombang AC pada elemen R:

$$i = I_m \sin \omega t \Rightarrow I = I_m \angle 0^\circ$$

$$V_R = R I_m \sin \omega t \Rightarrow V_R = R I_m \angle 0^\circ$$

Magnitude impedansi $|Z| = R$



Pengaruh gelombang AC pada elemen L:

$$i = I_m \sin \omega t \Rightarrow I = I_m \angle 0^\circ$$

$$V_L = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

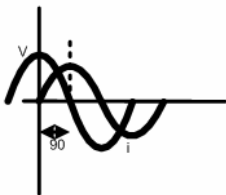
$$\Rightarrow V_L = \omega L I_m \angle 90^\circ$$

Arus tertinggal disbanding tegangan sebesar 90°

→ arus lagging

$$Z = \frac{V_L}{I} = \frac{\omega L I_m \angle 90^\circ}{I_m \angle 0^\circ}$$

$$Z = \omega L \angle 90^\circ = j\omega L$$



Pengaruh gelombang AC pada elemen C:

$$i = I_m \sin \omega t \Rightarrow I = I_m \angle 0^\circ$$

$$V_C = \frac{I_m}{\omega C} (-\cos \omega t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ)$$

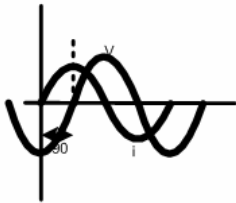
$$\Rightarrow V_C = \frac{I_m}{\omega C} \angle -90^\circ$$

Arus mendahului dibanding tegangan sebesar 90°

→ arus leading

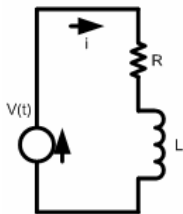
$$Z = \frac{V_C}{I} = \frac{\frac{I_m}{\omega C} \angle -90^\circ}{I_m \angle 0^\circ}$$

$$Z = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$



5. Impedansi Kompleks

Jika rangkaian seri RL dihubungkan dengan golongan AC maka:



$$V(t) = V_m e^{j\omega t}$$

$$KVL: R_1(t) + L \frac{d_1(t)}{dt} = V(t) = V_m e^{j\omega t}$$

Misalkan:

$$I(t) = K e^{j\omega t}$$

$$R K e^{j\omega t} + j\omega L K e^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

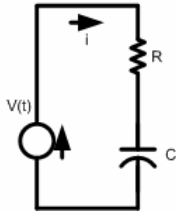
$$k = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

$$I(t) = \frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}$$

Sehingga impedansi menjadi

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}} = R + j\omega L$$

Jika rangkaian seri RC dihubungkan dengan gelombang AC maka:



$$V(t) = V_m e^{j\omega t}$$

$$KVL: R_1(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = V_m e^{j\omega t}$$

Misalkan:

$$I(t) = K e^{j\omega t}$$

$$R k e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} k e^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

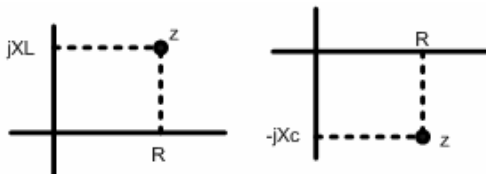
$$k = \frac{V_m}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$I(t) = \frac{V_m}{R - \frac{1}{\omega C}}$$

Sehingga impedansi

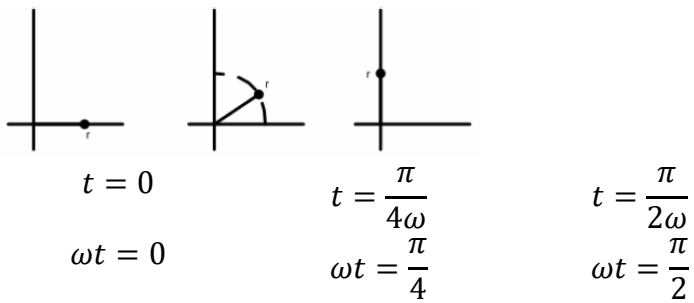
$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$$

Diagram impedansi:

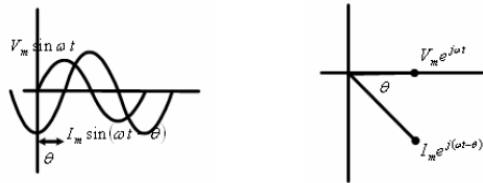


6. Diagram phasor

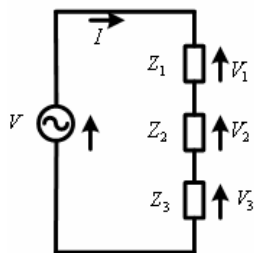
$$f(t) = r e^{j\omega t} = r \angle \omega t$$



Jika beda fasa antara tegangan dan arus sebesar θ maka diagram phasornya sebagai berikut:



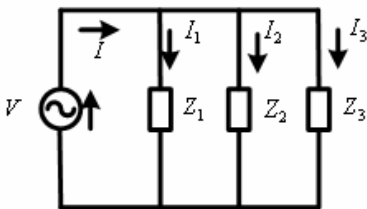
7. Rangkaian Seri dan Paralel



$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

$$= IZ_1 + IZ_2 + IZ_3$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3$$



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \frac{V}{Z_3}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

8. Admitansi Bilangan Kompleks

$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$Z = R \pm jX$$

$$Y = G \pm jB$$

Dimana:

$Z = \text{Impedansi}$

$R = \text{Resistansi}$

$X = \text{Reaktansi}$

$Y = \text{Admitansi}$

$G = \text{Konduktansi}$

$B = \text{Suseptansi}$

Contoh latihan:

1. Tentukan arus i_4 yang keluar dari percabangan saat arus i_1, i_2 dan i_3 masuk percabangan jika:

$$i_1 = 6 \cos 3t$$

$$i_2 = 4 \cos(3t - 30^\circ)$$

$$i_3 = -4\sqrt{3} \cos(3t + 60^\circ)$$

Jawaban:

$$i_4 = i_1 + i_2 + i_3 = 6 \cos 3t + 4 \cos(3t - 30^\circ) - 4\sqrt{3} \cos(3t + 60^\circ)$$

Dalam notasi phasor:

$$I_4 = I_1 + I_2 + I_3 = 6 \angle 0^\circ + 4 \angle -30^\circ - 4\sqrt{3} \angle 60^\circ = 6 + 3,46 - j2 - 3,46 - j6$$

$$I_4 = 6 - j8 = 10 \angle -53,1^\circ$$

Sehingga:

$$I_4 = 10 \cos(3t - 53,1^\circ)$$

2. Tentukan arus I_4 yang keluar dari percabangan saat arus i_1, i_2 dan i_3 masuk percabangan jika:

$$i_1 = 5 \cos(3t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 5 \sin 3t$$

$$i_3 = 5 \cos(3t + 150^\circ)$$

Jawaban:

$$i_4 = i_1 + i_2 + i_3 = 5 \cos(3t + 30^\circ) + 5 \sin 3t + 5 \cos(3t + 150^\circ)$$

$$i_4 = 5 \cos(3t + 30^\circ) + 5 \cos(3t - 90^\circ) + 5 \cos(3t + 150^\circ)$$

Dalam notasi phasor:

$$I_4 = I_1 + I_2 + I_3 = 5 \angle 30^\circ + 5 \angle -90^\circ + 5 \angle -150^\circ = 4,3 + j2,5 - j5 - 4,3 + j2,5$$

$$I_4 = 0$$

Harga rata-rata fungsi periodik didefinisikan sebagai integral fungsi waktu atas keseluruhan perioda dibagi dengan selang waktu periodanya.

Fungsi umum $y(t)$ dengan perioda T , maka harga rata-rata:

$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

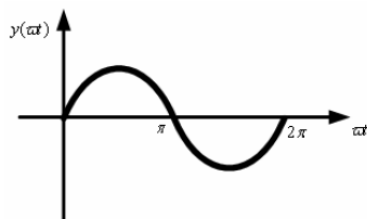
Harga efektif /RMS (Root Mean Square)

Fungsi umum $y(t)$ dengan perioda T , Maka harga efektif:

$$Y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt}$$

Contoh latihan:

1. Tentukan harga rata-rata dan efektif fungsi $(t) = A \sin \omega t$!



Jawaban:

- Harga rata-rata:

$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin \omega t d(\omega t) = \frac{A}{2\pi} - \cos \omega t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{A}{2\pi} [-\cos 2\pi - (-\cos 0)] = \frac{A}{2\pi} [-1 + 1] = 0$$

Harga efektif:

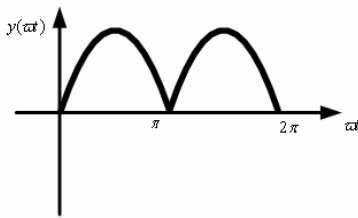
$$Y_{av} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2 \omega t d(\omega t)}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) d(\omega t)}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \omega t \Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos 2\omega t}{4} \Big|_0^{2\pi} \right]} = \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} (2\pi - 0) - \left(\frac{\cos 2 \cdot 2\pi}{4} - \frac{\cos 2 \cdot 0}{4} \right) \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} [\pi - (1 - 1)\omega]} = \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \pi} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

2. Tentukan harga rata-rata dan efektif fungsi $(t) = A \sin \omega t$!



Jawaban:

- Harga rata-rata:

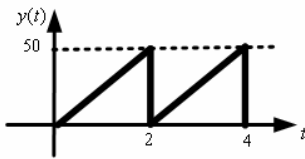
$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A \sin \omega t d(\omega t) = \frac{A}{\pi} - \cos \omega t \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{A}{\pi} [-\cos \pi - (-\cos 0)] = \frac{A}{\pi} [1 + 1] = \frac{2A}{\pi}$$

- Harga efektif

$$\begin{aligned}
 Y_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A^2 \sin^2 \omega t d(\omega t)} = \sqrt{\frac{A^2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) d(\omega t)} \\
 &= \sqrt{\frac{A^2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \omega t \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos 2\omega t}{4} \Big|_0^{\pi} \right]} = \sqrt{\frac{A^2}{\pi} \left[\frac{1}{2} (\pi - 0) - \left(\frac{\cos 2\pi}{4} - \frac{\cos 2 \cdot 0}{4} \right) \right]} = \sqrt{\frac{A^2}{\pi}} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

3. Tentukan harga rata-rata dan efektif fungsi $y(t)=25t$!



Jawaban:

- Harga rata-rata:

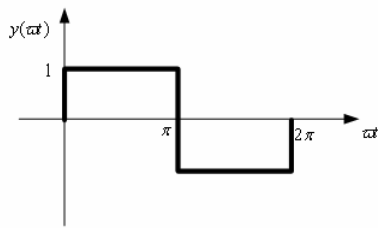
$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 25t dt = \frac{1}{2} \frac{25t^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{25}{4} (2^2 - 0) = 25$$

- Harga efektif

$$Y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^2 25^2 t^2 dt} = \sqrt{\frac{625}{2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^2} = \sqrt{\frac{625}{6} [2^3 - 0]} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

Soal untuk dikerjakan:

1. Jika $x = 3 + j4$ dan $y = 6 + j9$. Tentukan:
 - a. x dan y dalam bentuk polar
 - b. x dan y dalam bentuk trigonometri
2. Jika $Z_1 = 8 \angle 45^\circ$ dan $Z_2 = 5 \angle 30^\circ$. Tentukan :
 - a. $Z_1 + Z_2$
 - b. $Z_1 Z_2$
 - c. $Z_1 - Z_2$
3. Tentukan harga rata-rata dan efektifnya!



4. Tentukan harga rata-rata dan efektifnya!

