

Frekuensi Kompleks dan Fungsi Transfer

1. Sinyal Sinusoidal Teredam

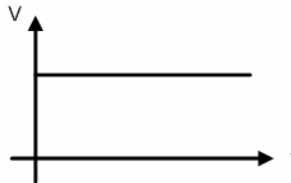
Pada buku ini fungsi sinusoidal mempunyai persamaan sebagai berikut:
 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ volt.

Pada bab ini dibahas mengenai frekuensi kompleks yang sebetulnya muncul dari persamaan fungsi sinusoidal hanya ditambahkan suatu nilai konstanta peredamnya, dimana dituliskan dalam persamaan: $v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ volt.

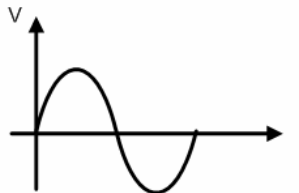
Pada persamaan tersebut muncul suatu konstanta peredam $e^{\sigma t}$, dimana σ adalah bernilai negative atau nol yang disebut dengan factor peredam/frekuensi Neper dengan satuan Np/s.

Pada persamaan $v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ volt tersebut apabila kita analisis bahwa:

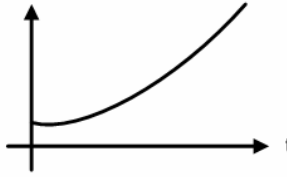
- Jika $\sigma = 0, \omega = 0 \Rightarrow v(t) = V_m$ merupakan sinyal searah atau DC.



- Jika $\sigma = 0 \Rightarrow v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ merupakan sinyal sinusoidal murni.



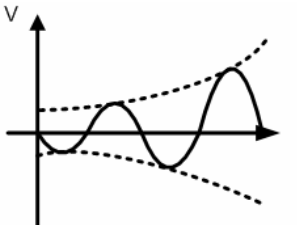
- Jika $\omega = 0, \sigma > 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{\sigma t}$ merupakan sinyal eksponensial positif.



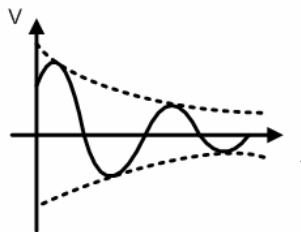
- Jika $\omega = 0$, $\sigma < 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{-\sigma t}$ merupakan sinyal eksponensial negatif.



- Jika $\sigma > 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ merupakan sinyal sinusoidal terdamp positif.



- Jika $\sigma < 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ merupakan sinyal sinusoidal terdamp negatif.



2. Phasor Frekuensi Kompleks

Pada bab sebelumnya mengenai notasi phasor untuk sinyal AC murni adalah sebagai berikut:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Notasi phasor:

$$V = \text{Re}[V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Re}[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}]$$

$$V(j\omega) = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

Jika dikonsep diatas diterapkan pada fungsi sinusoidal teredam maka:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Notasi phasor:

$$V = \text{Re}[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Re}[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Re}[V_m e^{j\phi} e^{\sigma t}]$$

$$V(s) = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

Dimana:

$$s = \sigma + j\omega$$

Impedansi dan Admitansi Frekuensi Kompleks

$$V(s) = Z(s)I(s)$$

Dimana:

Impedansi kompleks:

$$Z_R(s) = R$$

$$Z_L(s) = sL$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

Admitansi kompleks:

$$Y_R(s) = \frac{1}{R} = G$$

$$Y_L(s) = \frac{1}{sL}$$

$$Y_C(s) = sC$$

Contoh latihan:

1. Tentukan frekuensi kompleks dari sinyal dibawah ini:

a. $V = 25e^{-t}\cos 2t$

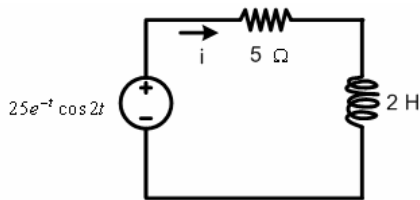
b. $V = 3e^{-4t}$

Jawaban:

a. $S = -1+j2$

b. $S = -4$

2. Tentukan arus I yang mengalir dari rangkaian berikut:



Jawaban:

$$s = -1 + j2$$

$$Z_R(s) = 5$$

$$Z_L(s) = sL = 2s$$

$$Z_T(s) = 5 + 2s$$

$$V = 25e^{-t}\cos 2t = 25\angle 0^\circ$$

$$i(s) = \frac{V(s)}{Z_T(s)} = \frac{25\angle 0^\circ}{5 + 2s} = \frac{25\angle 0^\circ}{5 + 2(-1 + j2)} = 5\angle -53,1^\circ$$

$$i(t) = 5e^{-t} \cos(2t - 53,1^\circ) \text{ A}$$

Fungsi Transfer Frekuensi Kompleks

Perbandingan antara output dengan input dalam frekuensi kompleks/H(s).

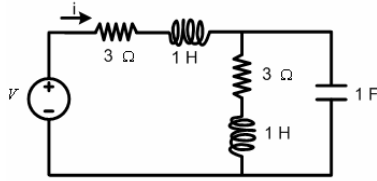
H(s) bias perbandingan tegangan terhadap arus, arus terhadap tegangan terhadap tegangan, atau arus terhadap arus.

Missal:

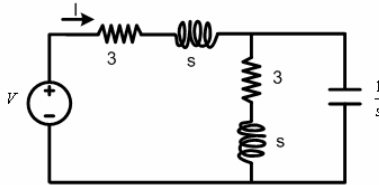
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \rightarrow V_o(s) = H(s)V_i(s)$$

Contoh latihan:

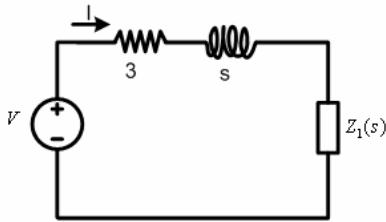
1. Tentukan fungsi transfer I terhadap V pada rangkaian berikut:



Jawaban:



$$Z_1(s) = \frac{3 + s}{s^2 + 3s + 1}$$



$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{3 + s + \frac{3 + s}{s^2 + 3s + 1}}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 1)}$$

2. Tentukan output tegangan jika diberikan fungsi transfer:

$$H(s) = \frac{4(s + 5)}{s^2 + 4s + 5}$$

Dimana input $V_i(s) = 2\angle 0^\circ$ dan $s = -2 + j3$

$$\begin{aligned} V_0(s) &= H(s)V_i(s) = \frac{4(s + 5)}{s^2 + 4s + 5} 2\angle 0^\circ \\ &= \frac{4(-2 + j3 + 5)}{(-2 + j3)^2 + 4(-2 + j3) + 5} 2\angle 0^\circ \\ &= -3(1 + j) \end{aligned}$$

$$V_0(s) = 3\sqrt{2} \angle -135^\circ$$

$$V_0(t) = 3\sqrt{2} e^{-t} \cos(3t - 135^\circ)$$

Pole dan Zero

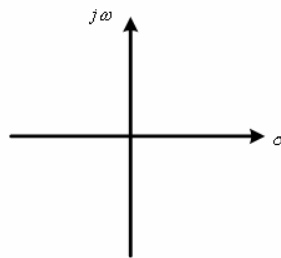
Jika fungsi transfer: $H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$ dinyatakan dengan persamaan:

$$H(s) = \frac{b_m(s - Z_1)(s - Z_2) \dots \dots \dots (s - Z_m)}{a_n(s - P_1)(s - P_2) \dots \dots \dots (s - P_n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$$

Yang dikatakan dengan zero adalah pembuat nilai nol pada fungsi transfer tersebut, dimana zero pada fungsi transfer diatas terdiri dari $Z_1, Z_2, \dots \dots \dots Z_m$

Yang dikatakan dengan pole adalah pembuat nilai tak hingga pada fungsi transfer tersebut, dimana pole pada fungsi transfer diatas terdiri dari $P_1, P_2, \dots \dots \dots P_n$.



Pada diagram s-plane tersebut dapat ditentukan kestabilan, dimana BIBO (*bounded input bounde output*) stability terletak atau berada disebelah kiri pole-polenya.

Macam-macam bentuk kestabilan:

- Absolutely stabil: berada disebelah kiri $j\omega$ axis.
- Conditionally stabil: tidak ada disebelah kanan pole tapi pada $j\omega$ axis untuk orde >1 .
- Unstable stabil: berada disebelah kanan $j\omega$ axis.

Diagram Bode Plot

Grafik penguatan fungsi transfer dalam decibel (dB) dan phasa dalam derajat terhadap logaritmik frekuensi.

$$H(s) = \frac{b_m(s + Z_1)(s + Z_2) \dots (s + Z_m)}{a_n(s + P_1)(s + P_2) \dots (s + P_n)}$$

$$= K_1 \frac{(s + Z_1)(s + Z_2) \dots (s + Z_m)}{(s + P_1)(s + P_2) \dots (s + P_n)}$$

$$H(s) = K \frac{\left(1 + \frac{1}{Z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{Z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{Z_m}\right)}{\left(1 + \frac{s}{P_1}\right) \left(1 + \frac{s}{P_2}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{P_n}\right)}$$

Jika: $s = j\omega$

$$H(j\omega) = K \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{Z_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{Z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{Z_m}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{P_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{P_2}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{P_n}\right)}$$

Dimana besaran magnitude dan phasanya, maka didapatkan:

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{|1 + j\omega/Z_1| |1 + j\omega/Z_2| \dots |1 + j\omega/Z_m|}{|1 + j\omega/P_1| |1 + j\omega/P_2| \dots |1 + j\omega/P_n|}$$

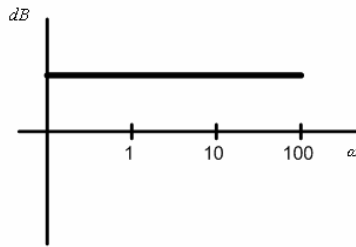
$$\angle H(j\omega) = K \frac{\angle(1 + j\omega/Z_1) \angle(1 + j\omega/Z_2) \dots \angle(1 + j\omega/Z_m)}{\angle(1 + j\omega/P_1) \angle(1 + j\omega/P_2) \dots \angle(1 + j\omega/P_n)}$$

Ada 4 jenis factor yang dapat muncul pada diagram bode plot fungsi transfer, yaitu:

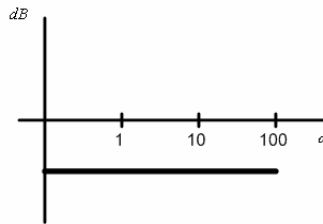
1. Konstanta K
2. Pole atau zero pada titik asal
3. Pole atau zero orde satu $\rightarrow (1 + j\omega/\omega_1)$
4. Pole atau zero factor kuadratik $\rightarrow 1 + j(2\xi/\omega_0) + (j\omega/\omega_0)^2$

Maka diagram bode untuk masing-masing factor tersebut:

1. Logaritmik K $\rightarrow 20\log K$
Untuk nilai: $K \geq 1$

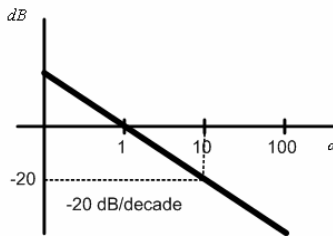


Untuk nilai: $0 < K < 1$

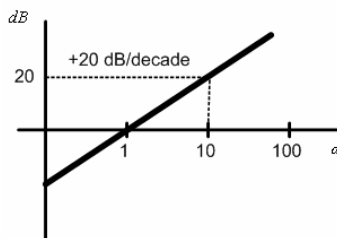


2. Pole atau zero pada titik asal

Untuk pole: $20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$



Untuk zero: $20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$



3. Pole atau zero orde satu.

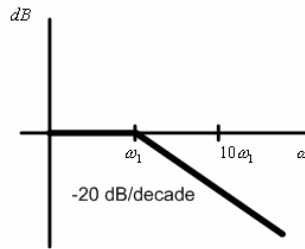
Untuk pole: $20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega/\omega_1} \right|$

Asintot:

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow -20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_1$



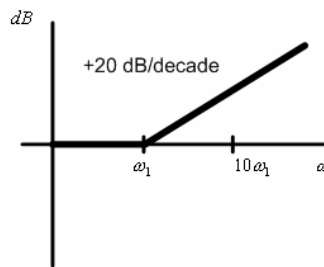
Untuk zero: $20\log\left|1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right|$

Asimtot:

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow 20\log 1 = 0\text{dB}$$

$$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow 20\log \frac{\omega}{\omega_1}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_1$



4. Pole atau zero factor kuadratik

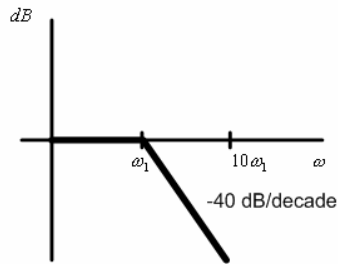
Untuk pole: $20\log\left|\frac{1}{1+j\left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$

Asimtot:

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow 20\log 1 = 0\text{dB}$$

$$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow -40\log \frac{\omega}{\omega_1}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_0$



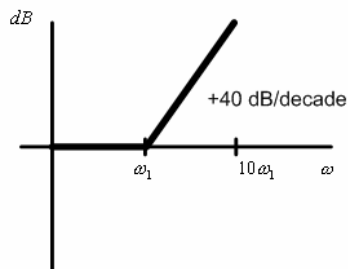
Untuk zero: $20 \log \left| 1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right|$

Asimtot:

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_0$



Contoh latihan:

1. Jika fungsi transfer dinyatakan dengan persamaan: $H(s) = \frac{R}{R+sL}$

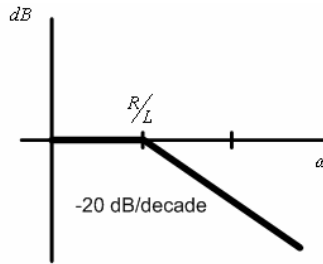
Tentukan diagram bode plotnya!

$$H(s) = \frac{R}{R+sL} = \frac{1}{1+sL/R}$$

Jika $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega L/R} = \frac{1}{1+j\omega R/L}$$

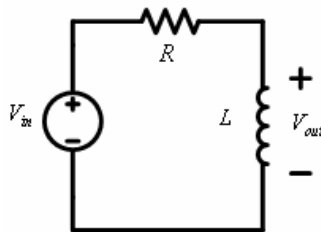
Gambar diagram bode plot:



2. Jika suatu rangkaian seri RL diberikan tegangan AC sebagai inputnya (V_{in}) dan outputnya pada komponen L, maka tentukan:
- Fungsi transfer dalam domain s
 - Diagram bode plot

Jawaban:

- a. Jika outputnya pada komponen L maka fungsi transfer



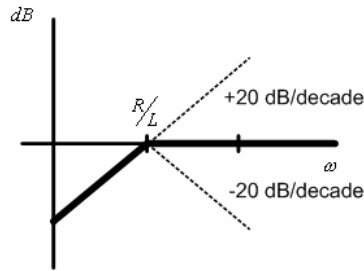
$$H(s) = \frac{sL}{sL + R}$$

- b. Diagram bode plot:

$$H(s) = \frac{sL}{sL + R} = \frac{sL/R}{sL/R + 1} = \frac{L/R/L}{1 + s/R/L}$$

Jika $s=j\omega$, maka:

$$H(s) = \frac{j\omega/R/L}{1 + j\omega/R/L}$$

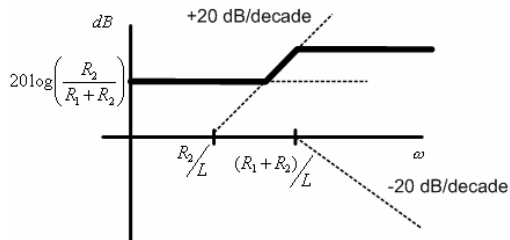


3. $H(s) = \frac{R_2 + sL}{R_1 + R_2 + sL}$, tentukan diagram bode plot!

Jawaban:

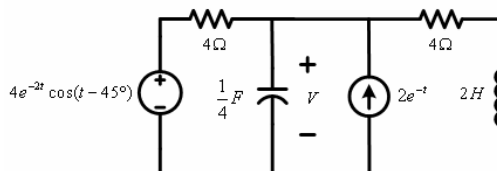
$$H(s) = \frac{R_2 + sL}{R_1 + R_2 + sL} = \frac{R_2(1 + sL/R_2)}{(R_1 + R_2)(1 + sL/(R_1 + R_2))}$$

$$= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{\left(1 + s/R_2/L \right)}{\left(1 + s/R_1 + R_2/L \right)}$$

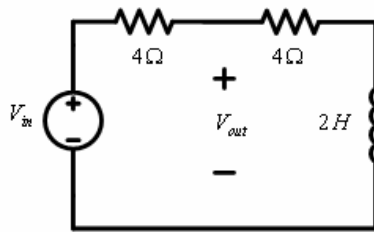


Soal untuk dikerjakan:

1. Tentukan nilai V!



2. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut:



3. Gambarkan diagram bode pada soal nomor 2 diatas!